FUNÇÕES

INTRODUÇÃO AO ESTUDO DAS FUNÇÕES

- Conceito

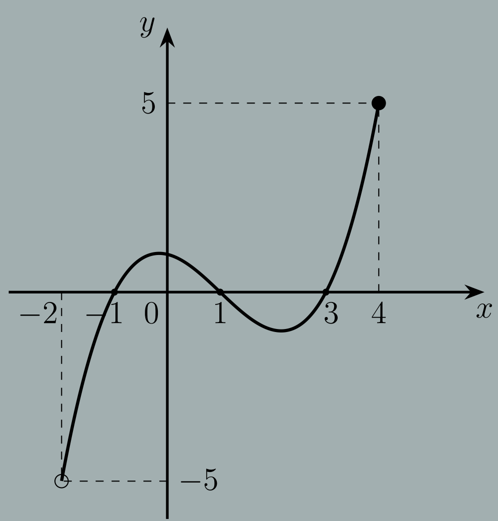
Dados dois conjuntos A e B, uma função $f : A \to B$ (uma função de A em B) é uma regra que informa como relacionar a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y = f(x) \in B$.
O conjunto A é o domínio e B o contradomínio da função f. Para cada $x \in A, f(x) \in B$ é o valor assumido pela função f no ponto $x \in A. f(x) \in B$ é a imagem de x pela função f, logo, o conjunto imagem é subconjunto do conjunto contradomínio.

- Gráfico

O gráfico de uma função é o conjunto dos pontos $(x, f(x))$.
Na figura abaixo, está desenhado o gráfico da função

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot (x+1) \cdot (x-1) \cdot (x-3),$$

no intervalo $]-2; 4]$.



O gráfico de uma função é extremamente útil para analisar domínio e imagem. Também é muito útil para analisar intervalos de crescimento e decrescimento e à partir daí, possíveis pontos de máximo ou mínimo. Além disso tudo, naturalmente pode ser usado para resolver inequações. Os pontos de intersecção entre o gráfico da função e o eixo x são os zeros da função, ou seja, são pontos do tipo $(x, 0)$ e são as raízes da equação $f(x) = 0$.

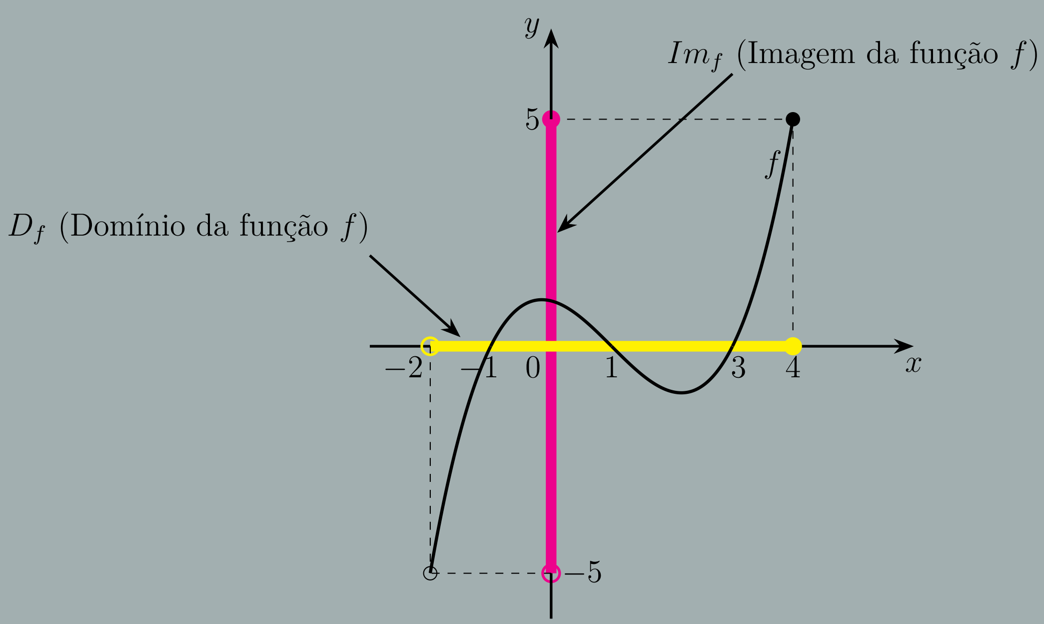
FUNÇÕES

INTRODUÇÃO AO ESTUDO DAS FUNÇÕES

- Domínio e Imagem no gráfico

Geometricamente, o domínio de uma função é a projeção ortogonal de todos os pontos da curva sobre o eixo x. Já o conjunto imagem é a projeção ortogonal de todos os pontos da curva sobre o eixo y. Vamos observar o domínio e a imagem do exemplo abaixo.

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot (x+1) \cdot (x-1) \cdot (x-3),$$



Há duas maneiras muito utilizadas para representar o conjunto domínio e o conjunto imagem de uma função.

- Intervalo real: $D_f =]-2, 4]$
- Conjunto: $D_f = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x \leqslant 4\}$
- Intervalo real: $Im_f =]-5, 5]$
- Conjunto: $Im_f = \{y \in \mathbb{R} : -5 < y \leqslant 5\}$

Observação: Se nada for dito sobre o domínio, considera-se como domínio o "maior" conjunto possível contido nos números reais.

FUNÇÕES

INTRODUÇÃO AO ESTUDO DAS FUNÇÕES

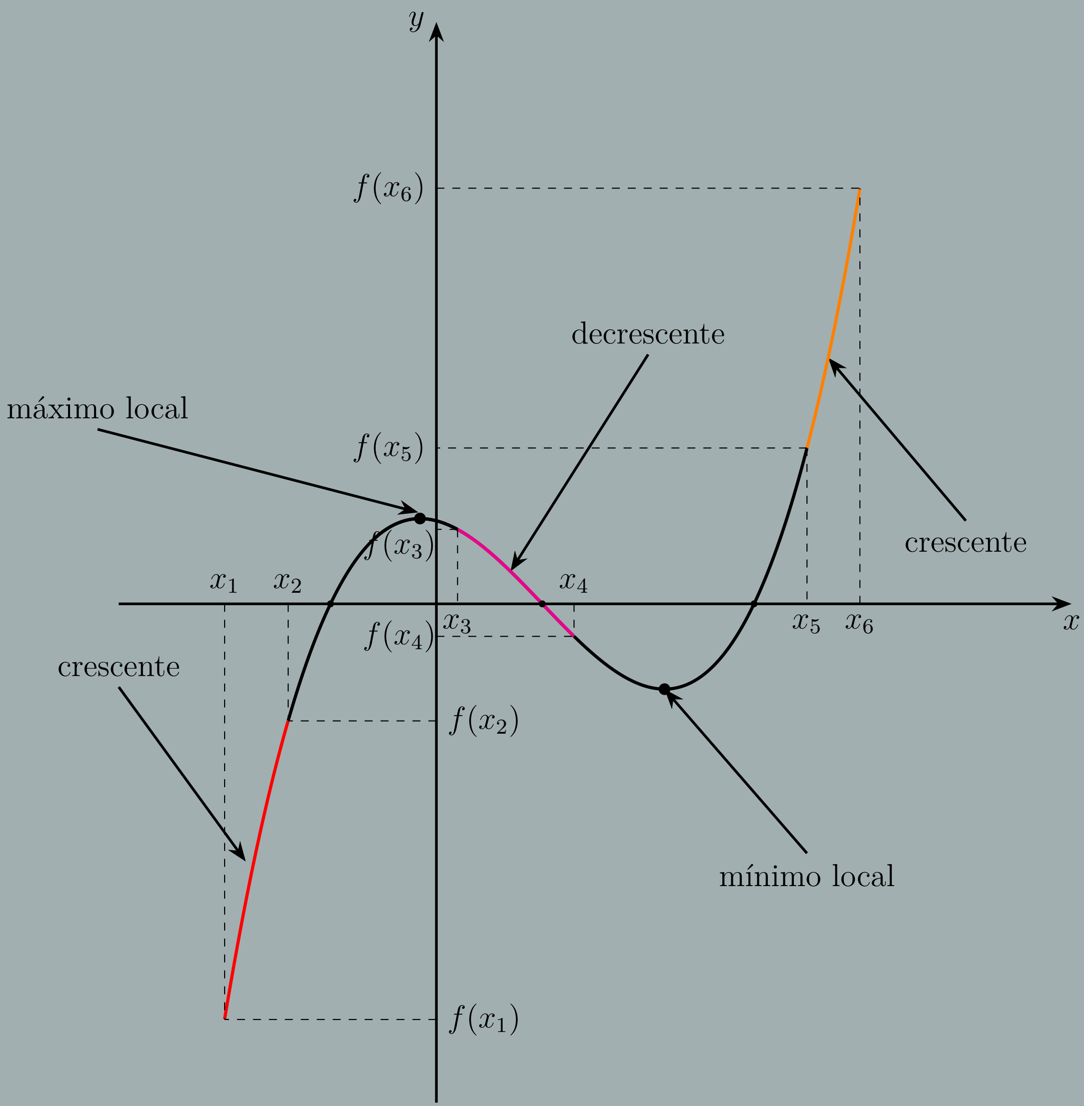
- Intervalos de crescimento/decrescimento de uma função

Dado $]x_1, x_2[\subset D_f$:

- se $x_1 > x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$, a função é crescente em $]x_1, x_2[$
- se $x_1 > x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$, a função é decrescente em $]x_1, x_2[$

Observemos alguns recortes na nossa função

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot (x+1) \cdot (x-1) \cdot (x-3)$$



FUNÇÕES

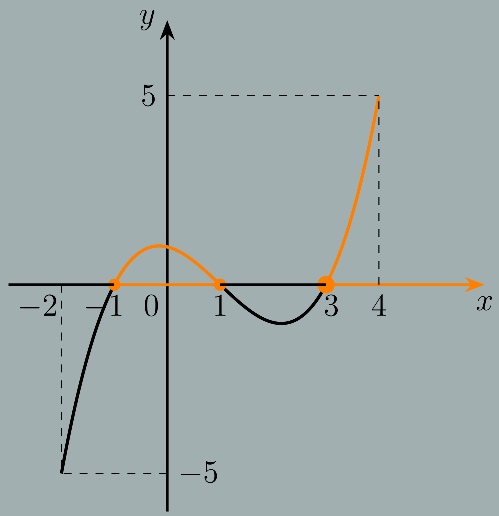
INTRODUÇÃO AO ESTUDO DAS FUNÇÕES

- Gráfico para resolver inequação

Vamos analisar o seguinte problema:

$$\frac{1}{3} \cdot (x+1) \cdot (x-1) \cdot (x-3) > 0$$

Podemos interpretar o problema acima do seguinte modo:
Para quais valores de x o número $\frac{1}{3} \cdot (x+1) \cdot (x-1) \cdot (x-3) > 0$ é maior do que zero?
Se fizermos $f(x) = \frac{1}{3} \cdot (x+1) \cdot (x-1) \cdot (x-3) > 0$, a pergunta será: para quais valores de x, $f(x) > 0$, ou seja, em quais intervalos de x, o gráfico de f está acima de $y = 0$? Sabendo quais são as raízes de f, o problema torna-se simples.



Observando o gráfico, verifica-se que $f(x) > 0$ em $[-1, 1] \cup [3, +\infty[$.
Uma outra maneira de escrever o conjunto solução dessa inequação é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 3\}.$$

Observação: No estudo dos polinômios vamos discutir por que o gráfico de f tem esse aspecto, "cortando" o eixo x em três pontos distintos e nada mais do que isso.